УДК 517.9

Т. Ф. Мамедова, А. А. Ляпина

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Аннотация. *Актуальность и цели.* В настоящее время многие реальные процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В связи с этим одной из важнейших проблем, возникающих в задачах математического моделирования, является проблема исследования устойчивости состояний равновесия и изучения асимптотических свойств решений таких систем. Для описания различных процессов и исследования динамических систем необходим математический аппарат, связанный с нелинейными системами дифференциальных уравнений. Поэтому появляется необходимость в развитии методов исследования таких систем и создании новых эффективных методов анализа. Возникает задача качественного анализа нелинейных систем, позволяющего определять условия устойчивого их функционирования. Важную роль в решении этой задачи играет разработка математических методов исследования систем. Целями данной работы являются: построение алгоритма исследования систем уравнений вольтерровского вида методом сравнения; качественное исследование математических моделей вольтерровского типа, основой которых являются нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений; проведение численного эксперимента на основе алгоритма исследования систем уравнений вольтерровского вида. *Материалы и методы*. Математические модели нелинейной динамики исследуются методом сравнения Е. В. Воскресенского, который представляет собой обобщение метода функций Ляпунова и является эффективным методом исследования динамических процессов. В настоящей работе нелинейные дифференциальные уравнения исследуются следующим образом. Для исходного уравнения строится уравнение сравнения. Предполагается, что поведение решения уравнения сравнения известно. Далее через эталонную функцию сравниваются решения двух этих уравнений. Удачный подбор уравнения сравнения и эталонной функции сравнения дает возможность для решения самых различных задач качественной теории дифференциальных уравнений, исследования поведения решений дифференциальных уравнений и, что самое важное, позволяет решать задачи теории устойчивости в критических случаях. *Результаты*. Разработан алгоритм исследования систем уравнений вольтерровского вида методом сравнения. Проведено качественное исследование математических моделей вольтерровского типа методом сравнения. *Выводы*. Построен вычислительный алгоритм с использованием метода сравнения, разработанного Е. В. Воскресенским. Представленный алгоритм реализован для конкретной модели вольтерровского типа. Сделаны выводы об асимптотической устойчивости системы уравнений по отношению к части переменных. Данные результаты исследований устойчивости модели «хищник-жертва», полученные методом сравнения Е. В. Воскресенского, аналогичны выводам, представленным авторами Yuejian Jie, Yuan Yuan.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотическая устойчивость по части переменных, модель «хищник-жертва».

T. F. Mamedova, A. A. Lyapina

THE ALGORITHM OF THE NONLINEAR DYNAMICS MODELS STUDY

Abstract. *Background.* Nowadays, a lot of real processes are described by nonlinear differential equations. In this regard, one of the most important problems in mathematical modeling is the problem of studying stability of equilibrium states and asymptotic properties of such systems solutions. There is necessity of mathematical apparatus associated with nonlinear systems of differential equations to describe various processes in dynamical systems. Therefore, it is necessary to develop methods of studying such systems and to create new effective methods of the analysis. We are faced with the challenge of analysing nonlinear systems that should allow us to determine the conditions of sustainable operation. It is also essential to develop mathematical methods to study these systems. The purpose of this paper is to construct an algorithm of studying the Volterra type equations by using the comparison method; to study the Volterra type mathematical models which are based on nonlinear systems of ordinary differential equations; to conduct numerical experiments based on the algorithm of studying the Volterra type equations. *Materials and methods.* Mathematical models of nonlinear dynamics are investigated by using the E. V. Voskresensky's comparison method, which is a generalization of the Ye. Lyapunov's functions method and is an effective method of studying dynamic processes. In this paper, we investigate nonlinear differential equations in the following way. The comparison equation is built for the original equation. It is assumed that we know how to solve the comparison equation. Next, using the method of standard functions we compare the two solutions of the equations. The proper selection of the equation of comparison and the reference comparison function allows us to solve various problems of the qualitative theory of differential equations, to study the behavior of differential equations solutions and, what is more important, allows us to solve problems in the theory of stability in critical cases. *Results.* The algorithm of studying systems of the Volterra type equations by using the comparison method has been developed. A qualitative study of mathematical models of the Volterra type equations by the comparison method has been done. *Conclusions*. The computational algorithm based on the E. V. Voskresensky's comparison method has been developed. The algorithm has been implemented for the Volterra type model. The asymptotic stability of the equations system in regard to variables has been stated. The outcomes of the study of the "predator-prey" model stability are similar to the findings presented by the authors Yuejian Jie, Yuan Yuan.

Key words: the system of ordinary differential equations, asymptotic stability in regard to variables, the "predator-prey" model.

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется изучению методов исследования моделей нелинейной динамики, в том числе одной из центральных проблем – устойчивости, стабильности систем. На сегодня существует множество разработанных подходов решения данной задачи.

Математические модели многих реальных процессов описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, поэтому одной из важнейших задач является задача изучения асимптотических свойств решений таких уравнений. Причем очень часто бывает достаточно знать о свойствах лишь отдельных компонент решений дифференциальных уравнений.

Как известно, регулярный случай, т.е. когда характеристические показатели первого приближения для нелинейного дифференциального уравнения отличны от нуля, для дифференциальных уравнений с гладкими возмущениями исследовался многими авторами, в том числе классиками А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Однако даже регулярный случай, когда все характеристические показатели отрицательны, не гарантирует устойчивость тривиального решения. Здесь необходима равномерность экспоненциальных оценок решений по отношению к возмущению начальных данных. Только в этом случае можно говорить о применимости первого метода Ляпунова для нелинейных дифференциальных уравнений. Если же имеются нулевые характеристические показатели, то непосредственно через характеристические показатели проблема устойчивости не решается.

Данная работа посвящена изучению методом сравнения Е. В. Воскресенского [1] процессов изменения состояний систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Применим этот метод к исследованию устойчивости решений системы дифференциальных уравнений вольтерровского типа.

1. Постановка задачи

Исследуется одна из основных задач системной динамики – оценка устойчивости системы.

Ставится задача изучения процессов изменения состояний систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, методом сравнения Е. В. Воскресенского.

В настоящей работе асимптотические методы получаются по следующей схеме. Для исследуемого уравнения строится так называемое уравнение сравнения. Предполагается, что поведение решения уравнения сравнения известно. Затем через эталонную функцию сравнения сравниваются решения этих двух уравнений и делается вывод о поведении решения исходного уравнения. Удачный подбор уравнения сравнения и эталонной функции сравнения позволяет решать самые различные задачи качественной теории дифференциальных уравнений и исследовать асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений.

2. Алгоритм исследования и решения систем нелинейных дифференциальных уравнений

Алгоритм решения поставленной задачи включает две части:

1. Исследование нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений на устойчивость.

2. Нахождение решения нелинейной динамической системы дифференциальных уравнений.

Построим вычислительную схему метода.

Рассмотрим дифференциальные уравнения:

$$\dot{x} = A(t)x + f\left(t, x\right), \tag{1}$$

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{2}$$

где $A(\cdot):[T,+\infty) \to Hom(R^n, R^n), f \in C^{(0,1)}(R_+^1 \times R^n, R^n)$.

Пусть решение $x(t:t_0,x_0)$ уравнения (1) существует для всех начальных условий $(t_0,x_0)\in T\times R^n$ и $t\in T$, $T=[0,+\infty)$.

Предположим также, что уравнение (1) имеет решение $x(t)\equiv 0$.

Алгоритм. Пусть задано исследуемое уравнение (1). Первая часть алгоритма включает выбор уравнения сравнения (2) и проверку условий метода сравнения, во второй части реализуется конкретный численный метод.

Первая часть.

1. Выбор уравнения сравнения (2).

2. Построение фундаментальной матрицы решений системы (2) $Y(t)=(y_{ij}(t)),\ i,j=\overline{1,n},\ Y(t_0)=E,\ t_0\in[T_0,+\infty),\ T_0\ge T$.

3. Построение обратной матрицы $Y^{-1}(s)=(y^{ji}(s)),\ i,j=\overline{1,n}$.

4. Оценка нелинейной части системы. Рассмотрим множества $N_0\subseteq M\subseteq M_0\subseteq \bar{M}_0\subseteq N$, $N=\{1,2,...,n\}$. Пусть

$$\left|f_j(t,x_1,...,x_n)\right|\le\lambda_j\left(t,\left|x_{j_1}\right|,...,\left|x_{j_q}\right|\right),\ \forall j\in N,\ \left\{j_1,...,j_q\right\}=M_0;$$

$$\lambda_j:[T,+\infty]\times R_+^q\to R_+^1,\ R_+^1=[0,+\infty),\ \lambda_j\in C([T,+\infty]\times R_+^q),$$

$$\lambda_j(t,r_1,...,r_i,...,r_q)\le\lambda_j(t,\bar{r}_1,...,\bar{r}_i,...,\bar{r}_q),\ r_i\le\bar{r}_i,\ i=\overline{1,q}\ \text{при всех}\ t\in[T,+\infty).$$

5. Вычисление эталонных функций сравнения. Пусть непрерывные функции $\mu_i:[T,+\infty)\to R_+^1,\ m_i:[T,+\infty)\to R_+^1$ удовлетворяют неравенствам:

а) если множество N_0 не пусто, то $\mu_i(t)\ge\max\limits_{j\in N_0}\left\{\left|y_{ij}(t)\right|\right\}$, $T_0\le t_0\le t<+\infty$, $i\in M_0$;

б) если множество N_0 пусто, то $\mu_i(t)\ge 0$, $i\in M_0$.

Пусть $m_i(t)\ge\max\left\{\max\limits_{j\in\bar{M}_0}\left|y_{ij}(t)\right|,\mu_i(t)\right\}$, $T_0\le t_0\le t<+\infty$, $i\in M_0$.

Пусть $\left|\varphi_i(t)\right|\le cm_i(t)$, $i=\overline{1,q}$, $\varphi\in C\left([T,+\infty),R^n\right)$.

6. Оценка равномерной сходимости несобственных интегралов в выражении

$$J_i(t,\phi)=\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{\substack{j\in M\\k\in B}}y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\phi(s))ds-\int\limits_{t}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\k\in M}}y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\phi(s))ds$$

по t при $c\to0,\ \mu_i(t)\to0,\ \forall t\in[T,+\infty),\ \forall i\in M_0$ на любом компакте из $[T;+\infty)$, где $B=N\setminus M$.

7. Построение уравнения сравнения:

$$\frac{dz}{dt}=\sum_{k,j\in N}\left|y^{jk}(t)\right|\lambda_j(t,zm(t)).\qquad(3)$$

Выявление существования решений уравнения (3), определенных на любом компакте из $[T;+\infty)$.

8. Выполнение пунктов 2–7 для уравнений (1) и (2) гарантирует асимптотическую эквивалентность по Брауеру. Переход ко второй части алгоритма.

9. Если пункты 2–7 для уравнений (1) и (2) не выполняются, то строим новое уравнение сравнения, т.е. переходим к пункту 1.

Вторую часть алгоритма рассмотрим на примере уравнения (1) с начальными данными $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix},\ f(t,x,y)=\begin{pmatrix} -\gamma_{12}xy \\ \gamma_{21}xy \end{pmatrix}.$$

Представим систему (1) в виде

$$\dot{z}=A(t)z(t). \tag{4}$$

1. Нахождение решения уравнения (4):

$$z(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right).$$

2. Построение итерационной схемы решений:

$$x_n(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t} u_{n-1}(t)\,dt\right),\quad y_n(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t} v_{n-1}(t)\,dt\right),$$

где $u_{n-1}(t)=a_1-\gamma_{12}y_{n-1}(t)$, $v_{n-1}(t)=-a_2-\gamma_{21}x_{n-1}(t)$; n – шаг итерации.

3. Проверка сходимости итерационной схемы с помощью соотношений вида

$$\|x_n-x_{n-1}\|<\varepsilon_1,\ \|y_n-y_{n-1}\|<\varepsilon_2.$$

4. Если выполняется условие 3, то вывод результатов.

3. Численная реализация алгоритма на примере исследования математической модели вольтерровского типа

Рассмотрим модель взаимодействия двух сообществ [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha x-\beta xy-\gamma x^3, \\ \dfrac{dy}{dt}=k\beta xy-my, \end{cases} \tag{5}$$

где x, y – численность популяций жертвы и хищника соответственно. Если популяция хищников отсутствует, то размер популяции жертв растет экспоненциально со скоростью α; тогда как в отсутствие популяции жертв смертность популяции хищников β растет экспоненциально. Следовательно, коэффициентам α и β соответствует внутривидовая скорость роста численности жертв и внутривидовая скорость смертности хищников соответственно; $\gamma > 0, \gamma x^3$ описывает внутривидовую конкуренцию.

Для численной реализации выберем следующие параметры:

$$\alpha = -0,15;\ \beta = 2,5;\ \gamma = 0,1;\ k = 0,2;\ m = 0,008.$$

1. Тогда система (12) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -0,15y_1 - 2,5y_1y_2 - 0,1y_1^3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 0,5y_1y_2 - 0,008y_2. \end{cases} \tag{6}$$

Точка (0,016; 0,0131) – положение равновесия системы (6).

Сделаем замену переменных $y_1 = x_1 + 0,016,\ y_2 = x_2 + 0,0131$, тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -0,1799x_1 - 0,04x_2 - 2,5x_1x_2 + 0,0048x_1^2 + 0,1x_1^3 - 0,1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 0,006x_1 + 0,5x_1x_2. \end{cases}$$

Перейдем к исследованию нулевого решения соответствующего первого линейного приближения, которое имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -0,1799x_1 - 0,04x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 0,006x_1. \end{cases} \tag{7}$$

2. Фундаментальная матрица системы (7) имеет вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -0,999e^{-0,177t} & 0,219e^{-0,0014t} \\ 0,0338e^{-0,177t} & -0,975e^{-0,0014t} \end{pmatrix}.$$

3. Обратная матрица к фундаментальной матрице системы (7) имеет вид

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} -1,008e^{0,177s} & -0,226e^{0,177s} \\ -0,034e^{0,0014s} & -1,032e^{0,0014s} \end{pmatrix}.$$

4. Множество $N = \{1,2\}$, $\bar{M}_0 = N$, тогда справедливы оценки [1]:

$$\left\| f_1(t,x) \right\| \le \left| -2,5x_1x_2 + 0,0048x_1^2 + 0,1x_1^3 - 0,1029 \right| \le |x_1||x_2| = \lambda_1\left(|x_1|,|x_2|\right),$$

$$\left\| f_2(t,x) \right\| \le |0,5x_1x_2| \le |x_1||x_2| = \lambda_2\left(|x_1|,|x_2|\right),$$

поэтому $M_0 = \{1,2\}$, $M = M_0$, $B = N - M = \{0\}$.

5. Тогда эталонные функции сравнения $\mu_i : [T, +\infty) \to R_+^1$, $m_i : [T, +\infty) \to R_+^1$ удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max\limits_{j \in N_0} \left| y_{ij}(t) \right|$, $T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$, если $N_0 \neq 0$; если $N_0 = 0$, то $\mu_i \geq 0$, $m_i(t) \geq \max\left\{ \max\limits_{j \in \bar{M}_0} \left| y_{ij} \right|, \mu_i(t) \right\}$, $T_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$, и будут иметь вид

$$m_1(t) = \max\left\{ \max_{j \in N_0} \left\{ \left| y_{11}(t) \right|, \left| y_{12}(t) \right|, \mu_1(t) \right\} \right\} = 0{,}99 e^{-0{,}177t};$$

$$\mu_1(t) = \max_{j \in N_0} \left\{ \left| y_{11}(t), y_{12}(t) \right| \right\} = 0{,}99 e^{-0{,}177t};$$

$$\mu_2(t) = \max_{j \in N_0} \left\{ \left| y_{21}(t), y_{22}(t) \right| \right\} = 0{,}975 e^{-0{,}0014t};$$

$$m_2(t) = \max\left\{ \max_{j \in N_0} \left\{ \left| y_{21}(t) \right|, \left| y_{22}(t) \right|, \mu_2(t) \right\} \right\} = 0{,}975 e^{-0{,}0014t}.$$

6. Рассмотрим следующее выражение:

$$J_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in B}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \int_{t}^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds.$$

Выражение $J_i(t, \varphi)$ существует $\forall\, i \in N$, $c \in \mathrm{R}_+^1$ и $J_i(t, \varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$. Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T; +\infty)$:

$$\left| J_1(t, \varphi) \right| = -\int_{t}^{+\infty} \left(\left| y_{11} y^{11} \right| f_1 + \left| y_{12} y^{12} \right| f_1 + \left| y_{11} y^{21} \right| f_2 + \left| y_{12} y^{22} \right| f_2 \right) ds =$$

$$= -0{,}95 e^{-0{,}177t} \int_{t}^{+\infty} e^{-0{,}0014s} ds + 0{,}42 e^{-0{,}0014t} \int_{t}^{+\infty} e^{-0{,}0014s} ds -$$

$$-0{,}21 e^{-0{,}177t} \int_{t}^{+\infty} e^{-0{,}177s} ds + 0{,}21 e^{-0{,}0014t} \int_{t}^{+\infty} e^{-0{,}177s} ds;$$

$$\left| J_2(t, \varphi) \right| = -\int_{t}^{+\infty} \left(\left| y_{21} y^{12} \right| f_1 + \left| y_{22} y^{12} \right| f_1 + \left| y_{21} y^{21} \right| f_2 + \left| y_{22} y^{22} \right| f_2 \right) ds =$$

$$= -0{,}006 e^{-0{,}177t} \int_{t}^{+\infty} e^{-0{,}0014s} ds - 0{,}2 e^{-0{,}0014t} \int_{t}^{+\infty} e^{-0{,}0014s} ds +$$

$$+0,0009e^{-0,177t}\int_{t}^{+\infty}e^{-0,177s}ds-0,96e^{-0,0014t}\int_{t}^{+\infty}e^{-0,177s}ds.$$

7. Все решения уравнения

$$\frac{dz}{dt}=\sum_{k\in N,\ j\in N}\left|y^{jk}(t)\right|\lambda_j\left(t,zm(t)\right)$$

определены на компакте $[T_0,t_0]$:

$$\frac{dz}{dt}=\sum_{k\in N,\ j\in N}\left|y^{jk}(t)\right|\lambda_j\left(t,zm(t)\right)=0,749e^{-0,34t}+0,88e^{-0,17t},$$

$$z=-2,2e^{-0,34t}-5,134e^{-0,17t}.$$

8. Выполнение пунктов 2–7 для систем уравнений (6) и (7) гарантирует асимптотическую эквивалентность решений по Брауеру.

Перейдем ко второй части алгоритма. Согласно пунктам алгоритма реализована программа на языке C++. Графическая иллюстрация решений системы (6) представлена на рис. 1, 2.

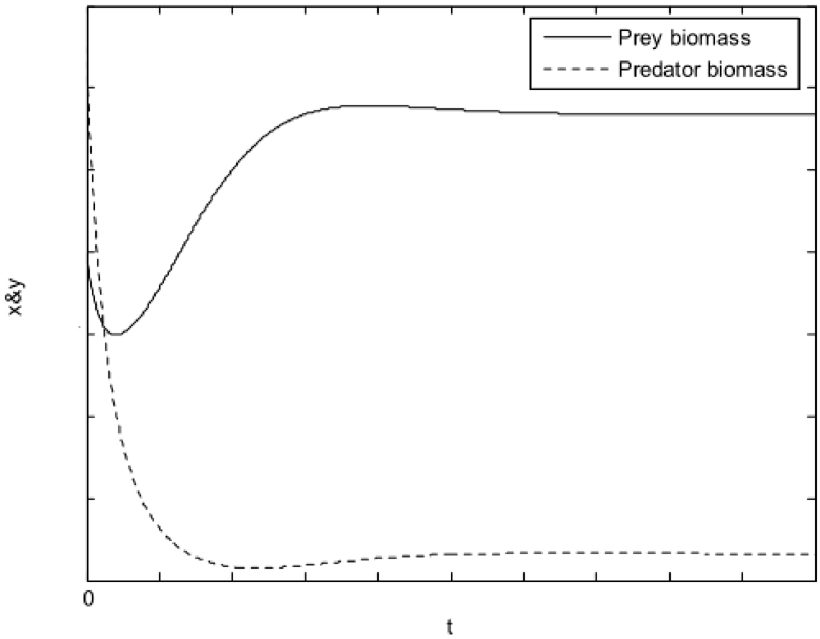

Рис. 1

Заключение

Представленный алгоритм реализован для конкретной модели вольтерровского типа [2].

Получено, что, так как система уравнений (7) асимптотически устойчива по переменным x_1, x_2, следовательно, тривиальное решение системы уравнений (6) обладает этим же свойством по всем переменным. Полученный алгоритм является обобщением исследований, начатых в статье [2].

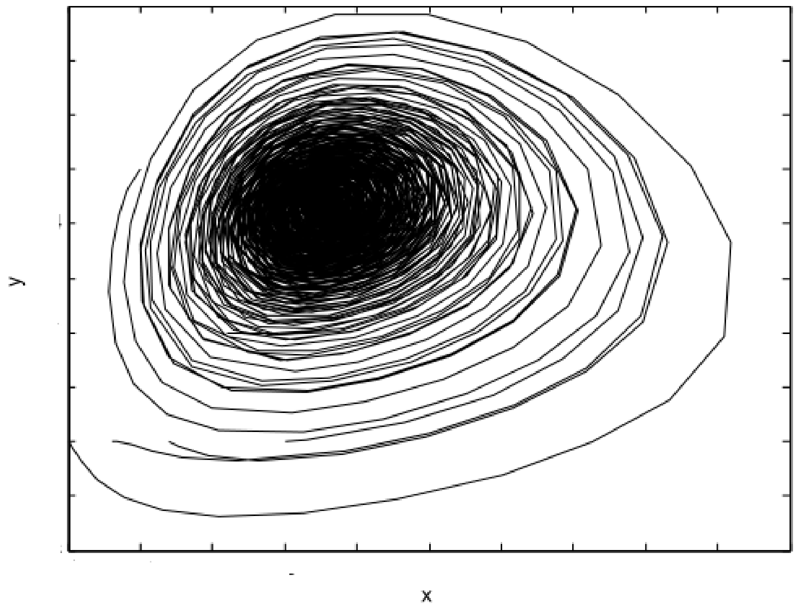

Рис. 2

Данные результаты исследований устойчивости модели «хищник-жертва», полученные методом сравнения Е. В. Воскресенского, аналогичны выводам представленным авторами Yuejian Jie, Yuan Yuan [3].

Список литературы

1. **Воскресенский, Е. В.** Асимптотические методы: Теория и приложения / Е. В. Воскресенский. – Саранск : Средневолжское математическое общество, 2001. – 300 с.
2. **Мамедова, Т. Ф.** Устойчивость математических моделей типа «хищник-жертва» / Т. Ф. Мамедова, Е. В. Десяев, А. А. Ляпина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 98–105.
3. **Yuejian Jie.** Model Stability Analysis of Marine Ecosystem / Yuejian Jie, Yuan Yuan // International Journal of Biology. – 2009. – Vol. 1, № 2. – P. 22–25.

References

1. Voskresenskiy E. V. *Asimptoticheskie metody: Teoriya i prilozheniya* [Asymptotic methods: Theory and application]. Saransk: Srednevolzhskoe matematicheskoe obshchestvo, 2001, 300 p.
2. Mamedova T. F., Desyaev E. V., Lyapina A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2012, no. 2, pp. 98–105.
3. Yuejian Jie. Yuan Yuan. *International Journal of Biology*. 2009, vol. 1, no. 2, pp. 22–25.

Мамедова Татьяна Фанадовна
кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68)

E-mail: mamedovatf@yandex.ru

Mamedova Tat'yana Fanadovna
Candidate of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of applied mathematics, Mordovia State University named after N. P. Ogarev (68 Bol'shevistskaya street, Saransk, Russia)

Ляпина Анна Александровна
аспирант, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68)

E-mail: lyapina@e-mordovia.ru

Lyapina Anna Aleksandrovna
Postgraduate student, Mordovia State University named after N. P. Ogarev (68 Bol'shevistskaya street, Saransk, Russia)

УДК 517.9

Мамедова, Т. Ф.

Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики / Т. Ф. Мамедова, А. А. Ляпина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 48–57.